Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden dos no homogéneas con coeficientes constantes

Sergio Yansen Núñez

1.
a)
Un cuerpo con masa $m = \frac{1}{2}$ *kilógramo* (kg) se sujeta al extremo de un resorte que está estirando 2 *metros* (m) por medio de una fuerza de 100 *newtons* (N). En el instante $t = 0$ el cuerpo se pone en movimiento, desplazándose hacia la derecha en $0.5m$ y moviéndose a la izquierda a $10\frac{m}{s}$. Determine la función posición del cuerpo.

Solución:

Sea $x(t)$ la posición del cuerpo en un tiempo $t \geq 0$.

$100 = k\Delta l \qquad \Rightarrow \qquad 100 = k \bullet 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 50$

$m = \frac{1}{2}$

$mx'' + kx = 0$

La EDO diferencial que describe al sistema es:

$\frac{1}{2}x'' + 50x = 0$, sujeta a $x(0) = \frac{1}{2}$, $x'(0) = -10$

$x'' + 100x = 0$

$\lambda^2 + 100 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 10i$

$x = a\cos(10t) + b\sin(10t)$

$x(0) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = a$

$x' = -10a\sin(10t) + 10b\cos(10t)$

$x'(0) = -10 \qquad \Rightarrow \qquad -10 = 10b \qquad \Rightarrow \qquad b = -1$

Luego,

$x = \frac{1}{2}\cos(10t) - \sin(10t)$

b)
La masa y el resorte de a), ahora se sujetan también a un amortiguador que proporciona $6N$ de resistencia por cada metro por segundo de velocidad. La masa es puesta en movimiento con la misma posición inicial $x(0) = 0.5m$ y a la misma velocidad inicial $x'(0) = -10\frac{m}{s}$. Determine la función posición del cuerpo.

Solución:

Sea $x(t)$ la posición del cuerpo en un tiempo $t \geq 0$.

$m = \frac{1}{2}$, $k = 50$, $\alpha = 6$

$mx'' + \alpha x' + kx = 0$

La EDO diferencial que describe al sistema es:

$\frac{1}{2}x'' + 6x' + 50x = 0$, sujeta a $x(0) = \frac{1}{2}$, $x'(0) = -10$

$x'' + 12x' + 100x = 0$

$\lambda^2 + 12\lambda + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -6 \pm 8i$

$x = ae^{-6t}\cos(8t) + be^{-6t}\sin(8t)$

$x(0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = a$

$x' = a(-6e^{-6t}\cos(8t) - 8e^{-6t}\sin(8t)) + b(-6e^{-6t}\sin(8t) + 8e^{-6t}\cos(8t))$

$x'(0) = -10 \quad \Rightarrow \quad -10 = -6a + 8b$

$-10 = -6 \bullet \frac{1}{2} + 8b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{7}{8}$

Luego,

$x = \frac{1}{2}e^{-6t}\cos(8t) - \frac{7}{8}e^{-6t}\sin(8t)$

2.
La constante de un resorte de acero de 2 *pie* se mide colgando una masa que pesa 16 *lb* del resorte y observando que éste se estira $\frac{1}{4}$ *pie*. Ahora se cuelga una masa que pesa 8 *lb*. La masa se jala hacia abajo $\frac{1}{4}$ *pie* y se deja libre con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 $\frac{pie}{s}$. Determine el desplazamiento $x(t)$ para todo $t \geq 0$.

Solución:

Sea $x(t)$ la posición del cuerpo en un tiempo $t \geq 0$.

$$mg = k\Delta l \qquad \Rightarrow \qquad 16 = k \bullet \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad k = 64$$

$$mg = 8 \qquad \Rightarrow \qquad m \bullet 32 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad m = \frac{1}{4}$$

$$mx'' + kx = 0$$

La EDO diferencial que describe al sistema es:

$$\frac{1}{4}x'' + 64x = 0 \text{ , sujeta a } x(0) = \frac{1}{4} \quad , \quad x'(0) = 1$$

$$x'' + 256x = 0$$

$$\lambda^2 + 256 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \pm 16i$$

$$x = a\cos(16t) + b\sin(16t)$$

$$x(0) = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{4} = a$$

$$x' = -16a\sin(16t) + 16b\cos(16t)$$

$$x'(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 16b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{1}{16}$$

Luego,

$$x = \frac{1}{4}\cos(16t) + \frac{1}{16}\sin(16t)$$

3.
Al sujetar una masa de $2kg$ a un resorte cuya constante es 32 $\frac{N}{m}$, éste queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t}\cos(4t)$ se aplica al sistema. Determine la ecuación del movimiento en ausencia de amortiguación.

Solución:

Sea $x(t)$ la posición del cuerpo en un tiempo $t \geq 0$.

$m = 2 \quad , \quad k = 32$

$mx'' + kx = f(t)$

La EDO diferencial que describe al sistema es:

$2x'' + 32x = 68e^{-2t}\cos(4t)$, sujeta a $x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 0$

$x'' + 16x = 34e^{-2t}\cos(4t)$

Solución homogénea:

$x'' + 16x = 0$

$\lambda^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 4i$

$x_H = a\cos(4t) + b\sin(4t)$

Solución particular:

$x'' + 16x = 34e^{-2t}\cos(4t)$

$(D^2 + 16)x = 34e^{-2t}\cos(4t) \quad / \quad (D+2)^2 + 16$

$(D^2 + 16)\left((D+2)^2 + 16\right)x = 0$

$(\lambda^2 + 16)\left((\lambda+2)^2 + 16\right) = 0$

$\lambda = \pm 4i \quad \vee \quad \lambda = -2 \pm 4i$

$x = A\cos(4t) + B\sin(4t) + Ce^{-2t}\cos(4t) + De^{-2t}\sin(4t)$

La forma de una solución particular es:

$x_p = Ce^{-2t}\cos(4t) + De^{-2t}\sin(4t)$

$$x_p' = e^{-2t}(-2C\cos(4t) - 2D\sin(4t) - 4C\sin(4t) + 4D\cos(4t))$$

$$x_p'' = e^{-2t}(-12C\cos(4t) + 16D\sin(4t) - 12C\sin(4t) - 16D\cos(4t))$$

Reemplazando en $x_p'' + 16x_p = 34e^{-2t}\cos(4t)$ se obtiene:

$$e^{-2t}(-12C\cos(4t) + 16D\sin(4t) - 12C\sin(4t) - 16D\cos(4t)) +$$
$$16(Ce^{-2t}\cos(4t) + De^{-2t}\sin(4t)) = 34e^{-2t}\cos(4t)$$

$$(4C - 16D)e^{-2t}\cos(4t) + (16C + 4D)e^{-2t}\sin(4t) = 34e^{-2t}\cos(4t)$$

$$4C - 16D = 34$$
$$16C + 4D = 0$$

resolviendo en sistema se obtiene: $C = \frac{1}{2}$, $D = -2$

Luego, $x_p = \frac{1}{2}e^{-2t}\cos(4t) - 2e^{-2t}\sin(4t)$

Solución general:

$$x = x_H + x_p$$

$$x = a\cos(4t) + b\sin(4t) + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos(4t) - 2e^{-2t}\sin(4t)$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$x' = -4a\sin(4t) + b\cos(4t) + e^{-2t}(-9\cos(4t) + 2\sin(4t))$$

$$x'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 4b - 9 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{9}{4}$$

Luego,

$$x = \frac{1}{2}\cos(4t) + \frac{9}{4}\sin(4t) + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos(4t) - 2e^{-2t}\sin(4t)$$

4.
Un circuito en serie consta de un inductor de $0.25H$, una resistencia de 40Ω, un capacitor de $4 \bullet 10^{-4}F$ y una fuerza electromotriz dada $E(t) = \cos(100t)\ V$. Si la corriente inicial y la carga inicial en el capacitor son ambas cero, determine la carga en el capacitor y la corriente eléctrica del circuito para cualquier tiempo $t > 0$.

Solución:

Sea $q(t)$ la carga en el capacitor en un tiempo $t > 0$

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$L = 0.25 \quad , \quad R = 40 \quad , \quad C = 4 \bullet 10^{-4}$$

$$0.25q'' + 40q' + \frac{q}{4 \bullet 10^{-4}} = \cos(100t)$$

$$q'' + 160q' + 10000q = 4\cos(100t)$$

Solución homogénea:

$$q'' + 160q' + 10000q = 0$$

$$\lambda^2 + 160\lambda + 10000 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -80 \pm 60i$$

$$q_H = ae^{-80t}\cos(60t) + be^{-80t}\sin(60t)$$

Solución particular:

$$q'' + 160q' + 10000q = 4\cos(100t)$$

$$(D^2 + 160D + 10000)q = 4\cos(100t) \quad / \quad D^2 + 10000$$

$$(D^2 + 10000)(D^2 + 160D + 10000)q = 0$$

$$(\lambda^2 + 10000)(\lambda^2 + 160\lambda + 10000) = 0$$

$$\lambda = \pm 100i \quad \vee \quad \lambda = -80 \pm 60i$$

$$q = A\cos(100t) + B\sin(100t) + Ce^{-80t}\cos(60t) + De^{-80t}\sin(60t)$$

La forma de una solución particular es:

$$q_p = A\cos(100t) + B\sin(100t)$$

$q_p' = -100A\sin(100t) + 100B\cos(100t)$

$q_p'' = -10000A\cos(100t) - 10000B\sin(100t)$

Reemplazando en $q_p'' + 160q_p' + 10000q_p = 4\cos(100t)$ se obtiene:

$-10000A\cos(100t) - 10000B\sin(100t) - 16000A\sin(100t) + 16000B\cos(100t) +$
$10000A\cos(100t) + 10000B\sin(100t)$

$16000B\cos(100t) - 16000A\sin(100t) = 4\cos(100t)$

$$16000B = 4 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{4000}$$

$$-16000A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Luego, $q_p = \frac{1}{4000}\sin(100t)$

Solución general:

$q = q_H + q_p$

$q = ae^{-80t}\cos(60t) + be^{-80t}\sin(60t) + \frac{1}{4000}\sin(100t)$

$q(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a$

$q = be^{-80t}\sin(60t) + \frac{1}{4000}\sin(100t)$

$q' = b(-80e^{-80t}\sin(60t) + 60e^{-80t}\cos(60t)) + \frac{1}{40}\cos(100t)$

$q'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 60b + \frac{1}{40} \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2400}$

Luego, la carga viene dada por:

$q(t) = -\frac{1}{2400}e^{-80t}\sin(60t) + \frac{1}{4000}\sin(100t)$

La corriente eléctrica es $i(t) = q'(t)$

$i(t) = \frac{1}{30}e^{-80t}\sin(60t) - \frac{1}{40}e^{-80t}\cos(60t) + \frac{1}{40}\cos(100t)$

5.
Un inductor de $4H$, una resistencia de 20Ω, un capacitor de $0.008F$ y un generador con una fuerza electromotriz dada por $E(t) = 500 \ Volts$ se conectan en serie. Si inicialmente la carga y la corriente son ambas cero, obtenga:

a) La carga y la corriente para todo tiempo.

b) La carga y la corriente después de un tiempo largo.

Solución:

a)

Sea $q(t)$ la carga en el capacitor en un tiempo $t > 0$

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$L = 4 \quad , \quad R = 20 \quad , \quad C = 0.008$$

$$4q'' + 20q' + \frac{q}{0.008} = 500$$

$$q'' + 5q' + \frac{125}{4}q = 125$$

Solución homogénea:

$$q'' + 5q' + \frac{125}{4}q = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + \frac{125}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{5}{2} \pm 5i$$

$$q_H = ae^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) + be^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t)$$

Solución particular:

$$q'' + 5q' + \frac{125}{4}q = 125$$

$$\left(D^2 + 5D + \frac{125}{4}\right)q = 125 \quad / \quad D$$

$$D\left(D^2 + 5D + \frac{125}{4}\right)q = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 + 5\lambda + \frac{125}{4}\right) = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \vee \qquad \lambda = -\frac{5}{2} \pm 5i$$

$$q = A + Be^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) + Ce^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t)$$

La forma de una solución particular es:

$$q_p = A$$

$$q_p' = 0$$

$$q_p'' = 0$$

Reemplazando en $q_p'' + 5q_p' + \frac{125}{4}q_p = 125$ se obtiene:

$$\frac{125}{4}A = 125 \qquad \Rightarrow \qquad A = 4$$

Luego, $q_p = 4$

Solución general:

$$q = q_H + q_p$$

$$q = ae^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) + be^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t) + 4$$

$$q(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = a + 4 \qquad \Rightarrow \qquad a = -4$$

$$q = -4e^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) + be^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t) + 4$$

$$q' = -4\left(-\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) - 5e^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t)\right) + b\left(-\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t) + 5e^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t)\right)$$

$$q'(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = -4 \bullet \left(-\frac{5}{2}\right) + 5b \qquad \Rightarrow \qquad b = -2$$

Luego, la carga viene dada por:

$$q(t) = -4e^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) - 2e^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t) + 4$$

La corriente eléctrica es $i(t) = q'(t)$

$$i(t) = 25e^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t)$$

b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} q(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(-4e^{-\frac{5}{2}t}\cos(5t) - 2e^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t) + 4\right) = 4$

La carga tiende a ser 4 *Coulomb*

$$\lim_{t\to+\infty} t(t) = \lim_{t\to+\infty} 25e^{-\frac{5}{2}t}\sin(5t) = 0$$

La corriente tiende a ser 0 *ampere*