1. Sea f una función inyectiva y derivable en IR , tal que $f(1) = 3$ y $f'(1) = 4$. Calcule$(f^{-1})'(3)$.

2. Si $f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f(2) = 5$, calcule $(f^{-1})'(5)$.

3. Dada $f(x) = \frac{x^5}{5} + 2x + 4$.Calcule $(f^{-1})'(4)$.

4. Dada $f(x) = 3x - \cos(x)$. Calcule $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $(f^{-1})'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

5. Si $y = 3x + 1$ es la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$, calcule $(f^{-1})'(4)$,

   sabiendo que f es una función inyectiva en IR.

6. Sea $f : IR \to IR$ una función biyectiva y derivable en su dominio.

   Si $f'(3) = \frac{1}{5}$. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = f^{-1}(x)$

   en el punto $(4, 3)$.

Resolución

1. Sea f una función inyectiva y derivable en IR , tal que $f(1) = 3$ y $f'(1) = 4$. Calcule$(f^{-1})'(3)$.

Solución:

Como f es derivable en 1 y $f'(1) \neq 0$, entonces existe f^{-1} en una vecindad de $f(1)$.

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ donde $x_0 = f^{-1}(y_0)$

$(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$

2. Si $f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f(2) = 5$, calcule $(f^{-1})'(5)$.

Solución:

f es derivable en 2 y $f'(2) \neq 0$, entonces existe f^{-1} en una vecindad de $f(2)$.

$f'(x) > 0\ \forall x \in IR \Rightarrow f$ es inyectiva en $IR \Rightarrow f^{-1}(5) = 2$.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{donde } x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$f'(2) = 3 \bullet 2^2 + 1 = 13$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{13}.$$

3. Dada $f(x) = \frac{x^5}{5} + 2x + 4$.Calcule $f^{-1}(4)$.

Solución:

f es derivable en IR

$f'(x) = x^4 + 2 > 0\ \forall x \in IR \Rightarrow f$ es inyectiva en IR

$$f(x) = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^5}{5} + 2x + 4 = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^5}{5} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5}x(x^4 + 10) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 4$$

f es derivable en 0 y $f'(0) = 2 \neq 0$, entonces existe f^{-1} en una vecindad de $f(0)$.

$$f(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(4) = 0$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{donde } x_0 = f^{-1}(y_0)$$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

4. Dada $f(x) = 3x - \cos(x)$. Calcule $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y $(f^{-1})'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Solución:

f es derivable en IR

$f'(x) = 3 + \sin(x) > 0 \ \forall x \in IR \Rightarrow f$ es inyectiva en IR

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$

f es derivable en $\frac{\pi}{2}$ y $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \neq 0$, entonces existe f^{-1} en una vecindad de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ donde $x_0 = f^{-1}(y_0)$

$(f^{-1})'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$

5. Si $y = 3x + 1$ es la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$, calcule $(f^{-1})'(4)$, sabiendo que f es una función inyectiva en IR.

Solución:

f es derivable en 1.

$f'(1)$ es la pendiente de la recta dada por $y = 3x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 3 \neq 0$,

Por lo anterior, existe f^{-1} en una vecindad de $f(1)$.

$f(1) = 3 \bullet 1 + 1 = 4$, como f es inyectiva, entonces $(f^{-1})(4) = 1$

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ donde $x_0 = f^{-1}(y_0)$

$(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{3}$.

6. Sea $f : IR \longrightarrow IR$ una función biyectiva y derivable en su dominio.

Si $f'(3) = \frac{1}{5}$. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = f^{-1}(x)$

en el punto $(4,3)$.

Solución:

f es derivable en 3 y $f'(3) \neq 0$, existe f^{-1} en una vecindad de $f(3)$.

Como $f^{-1}(4) = 3 \quad \Rightarrow \quad f(3) = 4$.

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ donde $x_0 = f^{-1}(y_0)$

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

La ecuación de la recta tangente a $y = f^{-1}(x)$ en el punto $(4,3)$ viene

dada por $y - 3 = (f^{-1})'(4)(x - 4)$

$$y - 3 = 5(x - 4)$$

$$y - 3 = 5x - 20$$

$$y = 5x - 17$$

La ecuación de la recta tangente a $y = f^{-1}(x)$ en el punto $(4,3)$ es $y = 5x - 17$.