1. Calcule el valor de los siguientes determinantes:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 13 & 17 \\ 4 & 10 & 16 & 25 & 33 \\ 8 & 20 & 32 & 49 & 62 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & 2a & 2a & 2a & 2a \\ 2a & 3a & 4a & 3a & 3a \\ 4a & 6a & 7a & 6a & 6a \\ 8a & 12a & 14a & 12a & 12a \end{vmatrix}$$

Respuestas:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 13 & 17 \\ 4 & 10 & 16 & 25 & 33 \\ 8 & 20 & 32 & 49 & 62 \end{vmatrix} = 0$$

b) $$\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ a & 2a & 2a & 2a & 2a \\ 2a & 3a & 4a & 3a & 3a \\ 4a & 6a & 7a & 6a & 6a \\ 8a & 12a & 14a & 12a & 12a \end{vmatrix} = 0$$

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

a) Calcule el determinante y el rango de A.

b) Si a la matriz A se le aplica, en forma secuencial, las siguientes operaciones elementales fila:

$f_3(2)$, f_{12} , $f_{31}(2)$, $f_2(-3)$

Calcule el determinante de la matriz resultante.

Respuestas:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

A es invertible pues $\det(A)$ es distinto de cero.

Por ser A de 4×4 e invertible, entonces el rango de A es 4.

b) Sea B la matriz obtenida, luego de aplicarle secuencialmente a la matriz A las siguientes operaciones elementales fila:

$f_3(2)$, f_{12} , $f_{31}(2)$, $f_2(-3)$

$\det(B) = 2 \bullet (-1) \bullet (-3) \bullet \det(A) = 6$

3. Sea A una matriz de 5×5 tal que $\det(A) = 2$. Si a la matriz A se le aplica, en forma secuencial, las siguientes operaciones elementales fila:

$f_3(4)$, f_{23} , $f_{21}(3)$, $f_3(-2)$, f_{12} , f_{24}

Calcule el determinante de la matriz resultante.

Respuestas:

Sea B la matriz obtenida, luego de aplicarle secuencialmente a la matriz A las siguientes operaciones elementales fila:

$f_3(4)$, f_{23} , $f_{21}(3)$, $f_3(-2)$, f_{12} , f_{24}

$\det(B) = 4 \bullet (-1) \bullet (-2) \bullet (-1) \bullet (-1) \bullet \det(A) = 16$

4. Calcule el rango de la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 4 & 12 & 20 & 28 & 36 \end{bmatrix}$

¿Es A invertible?

Respuestas:

El rango de A es 2

A es de 5×5, si fuese invertible, tendría rango igual a 5. Por tanto, A no es invertible.

5. Si A es una matriz de 4×4 tal que $\det(A) = -1$. Calcule el rango de:

a) A b) $adj(A)$ c) AA^T

Respuestas:

A es invertible pues su determinante es distinto de cero.

a) A es invertible de 4×4, por tanto el rango de A es 4.

b) $adj(A)$ es invertible de 4×4, por tanto el rango de $adj(A)$ es 4.

c) AA^T es invertible de 4×4, por tanto el rango de AA^T es 4.

6. En cada caso, determine, si es posible, todos los valores de a y $b \in IR$ tales que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & a & a & 1 \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

tenga rango igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Solución:

A es de 4×4, $\det(A) = (a-1)^2(a+1)$.

A es invertible para $a \in IR - \{1,-1\}$

Por tanto, A tiene rango igual a 4, para $a \in IR - \{1,-1\}$ y $b \in IR$

Para $a = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{21}(-1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $a = 1$ *y* b diferente de 1 , entonces:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_2\left(\frac{1}{b-1}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{32}(-2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 1$, b es diferente de 1 y de 2, entonces A tiene rango igual a 3.

Si $a = 1$, $b = 2$, A tiene rango igual a 2.

Para $a = 1$ y $b = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} f_{23} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 1$ y $b = 1$, entonces A tiene rango igual a 2.

Para $a = -1$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1\left(-\frac{1}{2}\right) \\ f_4\left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{34}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} f_{43}(-b) \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $a = -1$ y $b \in IR$, A tiene rango igual a 3.

Respondiendo las preguntas:

a) No existen valores de a y b reales, para los cuales, la matriz A tenga rango igual a 1.

b) A tiene rango igual a 2 si: $a = 1$ y $b = 1$

$a = 1$, $b = 2$

c) A tiene rango igual a 3 si: $a = 1$, b es diferente de 1 y de 2

$a = -1$ y $b \in IR$

d) A tiene rango igual a 4 si: $a \in IR - \{1, -1\}$ y $b \in IR$

7. En cada caso, determine, si es posible, todos los valores de a y $b \in IR$ tales que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 2 & 2 \\ a & 1 & a-1 & b+1 \\ a & 1 & 1 & a-2 \end{bmatrix}$$

tenga rango igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Solución:

Escalonando la matriz:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 2 & 2 \\ a & 1 & a-1 & b+1 \\ a & 1 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_{21}(-1) \\ f_{31}(-1) \\ f_{31}(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

A es de 4×4, $\det(A) = a(a-1)(a-2)(a-3)$.

A es invertible para $a \in IR - \{0,1,2,3\}$

Por tanto, A tiene rango igual a 4, para $a \in IR - \{0,1,2,3\}$ y $b \in IR$

Para $a = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} f_{21}(1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} f_2\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} f_{32}(2) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} f_{34}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{bmatrix} f_3\left(-\tfrac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{bmatrix} f_{43}(-b-2)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 0$ y $b \in IR$, A tiene rango igual a 3.

Para $a = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} f_{32}(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} f_4\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{43} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \end{bmatrix} f_{43}(-b-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 1$ y $b \in IR$, A tiene rango igual a 3.

Para $a = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ f_4(-1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{34}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{f_{43}(-b)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 2$ y $b \in IR$, A tiene rango igual a 3.

Para $a = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1\left(\frac{1}{3}\right) \\ f_2\left(\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $a = 3$ y $b \in IR$, A tiene rango igual a 3.

Respondiendo las preguntas:

a) No existen valores de a y b reales, para los cuales, la matriz A tenga rango igual a 1.

b) No existen valores de a y b reales, para los cuales, la matriz A tenga rango igual a 2.

c) A tiene rango igual a 3 si:

$a = 0$ y $b \in IR$

$a = 1$ y $b \in IR$

$a = 2$ y $b \in IR$

Si $a = 3$ y $b \in IR$

d) A tiene rango igual a 4 si: $a \in IR - \{0, 1, 2, 3\}$ y $b \in IR$